生産理論に於ける安定性 (最適化の基礎理論と応用)

田中, 嘉浩

数理解析研究所講究録
第1879巻 2014年 61-78

生産理論に於ける安定性*

北海道大学大学院経済学研究科　田中　嘉浩 (Yoshihiro Tanaka) †
Graduate School of Economics and Business Administration,
Hokkaido University

1　はじめに

ミクロ経済理論は静学分析に於いては最適化の概念に基づく定式化が主流であり，特に，生産理論は消費者理論と同様に，Hicks [6], Shephard [18], Shephard [19] や Samuelson [17]; Diewert [5], Avriel, Diewert, Schaible, Zang [2] 等多くの研究者に依って研究されてきた。消費者理論では選好がある性質を満たす時に効用関数がある証明から始まって効用最大化モデルと支出最小化モデルの関係が導かれているが，効用関数が概念的な為に抽象的な感が残るが，生産理論では直截的で分り易い。

我々は主に現代ミクロ経済理論の２つの基本的な生産モデル，費用最小化モデルと利潤最大化モデルに関して関数の一般化と費用最小化モデルの安定性について調べる。

関数が微分可能な場合には，(1) Shephard の補題は，条件付き要素需要と費用関数の要素価格に関する偏微分の間の関係，(2) Hotelling の補題は，出力や入力と利潤関数の価格や要素価格に関する偏微分の間の関係，をそれぞれ確立していることは経済学の文献に十分に書かれている。特に，何人かの研究者 (Samuelson [16], Shephard [18]) は，幾つかの条件の下で経済学の双対定理に関連して費用最小化モデルを調べた。

一方，最適化理論に於ける非滑解析は最適化理論の適用範囲を拡張する為に多くの研究者 (e.g., Clarke [3]) に依って試みられてきた。Rockafellar and Wets [15] は実汎関数のより幅広い扱いを目指した変分解析を統合した。

本稿には直接の関係はないが，最近は離散変数や劣モジュラ関数等離散数学の導入もされ始めており，耐久財等非分割財の交換経済 [20] 等への適用が為されつつあるが，その方向も大きな発展が望まれることを付記しておきたい。

本稿では，我々は非滑最適化の枠組みの下で劣微分や Clarke の劣微分を用いながら従来の結果を拡張し，一般 Shephard の補題や一般 Hotelling の補題を示す。ところで，経

*京都大学数理解析研究所講究録
†E-mail: tanaka@econ.hokudai.ac.jp

済学にも数理計画にも解の連続性を扱った文献は殆どないのも注意すべきである。解の連続性を保証するには線形生産関数ですら十分ではない。本稿では Vial[24] 等に依る（[24] では強準凸性だが）強準凹性の概念を導入し，条件付き要素需要関数 $x(w)$ の連続性を保証する十分条件——緩い条件の下で必要条件にもなる——を調べる。最後に，感度分析に関する結果を述べる。

2 準　備

まず最初に，便宜のために，非滑解析に於ける幾つかの定義を簡潔に纏める。関数 f で，どの $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\delta > 0$ と $c > 0$ が存在して，$\| z - x \| \leq \delta$, 但し $\| \cdot \|$ は $\mathbb{R}^n$ の任意のノルム，$\| y - x \| \leq \delta$ ならば，$|f(y) - f(z)| \leq c \| y - z \|$ を満たす時その時に限り局所リプシッツ連続という。関数 f が局所リプシッツ連続ならば，一般方向微係数 $f^\circ(x;d)$ は

$$f^\circ(x;d) = \limsup_{y \to x,\ t \downarrow 0} \frac{f(y+td) - f(y)}{t} \tag{1}$$

に依って定義され，それは Clarke の劣勾配 $\xi \in \partial f(x)$ を用いれば

$$f^\circ(x;d) = \max\{\langle \xi, d \rangle \mid \xi \in \partial f(x)\}, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

と等価である（Clarke [3], Proposition 2.1.2 を見よ)。関数 f が更に凸ならば，$\partial f(x)$ は通常の劣微分 $\partial^c f(x)$ (cf. Rockafellar [14]) に一致し，$f^\circ(x;d)$ はどの d に対しても方向微係数 $f'(x;d)$ に一致する。

我々は本稿を通じて生産理論の次の２つの基本モデルを考える。

<u>費用最小化モデル</u>

$$\begin{array}{llll} \text{(Cmin)} & C(w,y) = & \text{minimize} & \langle w, x \rangle \\ & & \text{subject to} & f(x) \geq y, \\ & & & x \in \mathbb{R}^n_+, \end{array}$$

但し，$x \in \mathbb{R}^n_+$ は入力ベクトル，$w \in \mathbb{R}^n_+$ は要素価格，$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ は生産関数，$y \geq 0$ は所与の出力，を満たす $x(w,y)$ を求めよ。

<u>利潤最大化モデル</u>

$$\text{(Pmax)} \quad \pi(p,w) = \begin{array}{ll} \text{maximize} & py - \langle w, x\rangle \\ \text{subject to} & f(x) \geq y, \\ & x \in \mathbb{R}^n_+, \end{array}$$

但し，$x \in \mathbb{R}^n_+$ は入力ベクトル，$y \geq 0$ は出力，$p \geq 0$ は価格，$w \in \mathbb{R}^n_+$ は要素価格，$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ は生産関数，を満たす $x(p,w)$ と $y(p,w)$ を求めよ。

我々は上述の２つのモデルを上半連続関数の枠組で調べ，第３節で一般 Shephard の補題 や 一般 Hotelling の補題 を導出する。

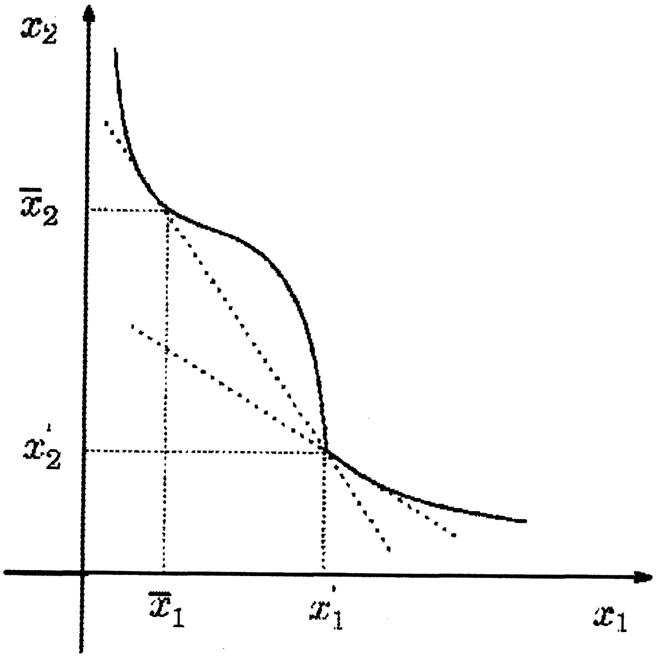

図 1: 生産関数の等量曲線

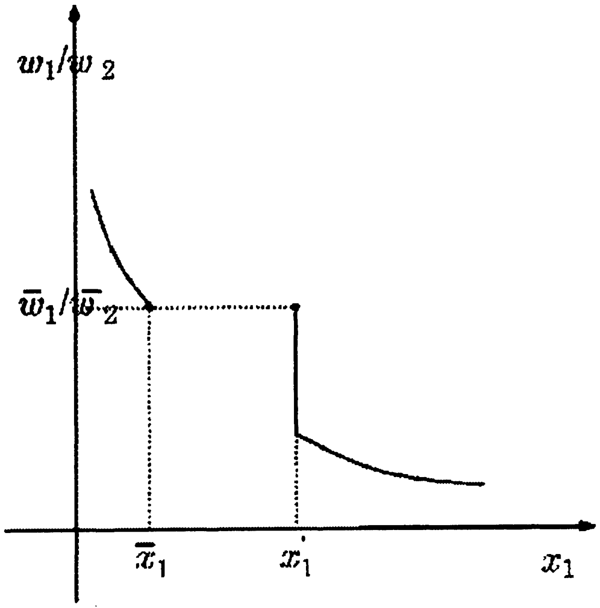

図 2: 条件付き要素需要関数

関数 $f(x)$ の等量曲線が 図 1 の様に描かれる場合を考える。生産関数が連続な場合（実際，生産関数が線形の場合にさえ (第 4 節の例 1 を見よ)）にさえ，条件付き要素需要関数が不連続になり得ることが分る。この不連続性は経済全体に悪影響を及ぼすこともあるが，それが第 4 節の緩やかな仮定の下でそういう場合を排除する必要十分条件を確立する我々の動機になっている。

3 生産理論の一般化

我々は次の仮定を生産関数におく。

仮定 U 生産関数 $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ は上半連続 (*upper semicontinuous*) 且つ $\forall x > 0$ に対

して $f(x)>0$。

生産可能集合を $U(f,y)\equiv\{x\in\mathbb{R}^n_+ \mid f(x)\geq y, y\geq 0\}$ と定義する。

先ず，費用最小化モデル (Cmin) に関する結果を示す。

補題 1 *[23]*　費用最小化モデル (Cmin) に於いて，$f:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}_+$ は上半連続と仮定する。その時 $C(w,y)$ は w に関して一次同次，$w>0$ に対して $U(f,y)$ に最小値を持つ。更に，$C(w,y)$ は w に関して凹になる。 □

上の結果は f の連続性すら必要としないことに気付くべきである。

一般 Shephard の補題 を確立する。

定理 3.1　費用最小化モデル (Cmin) に於いて，関数 $f:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}_+$ は上半連続とする。$\bar{x}$ を (Cmin) の (w,y) での最小解，即ち，$w>0$ に対して，$C(w,y)=\langle w,\bar{x}\rangle=\min\{\langle w,x\rangle \mid f(x)\geq y, x\in\mathbb{R}^n_+\}$ とする。その時，(w,y) での C の w に関する *Clarke* 劣微分が存在して，

$$\bar{x}\in-\partial^c_w(-C)(w,y)=\partial_w C(w,y) \tag{3}$$

が成立する。

［証　明］　$C(w,y)$ は f が準凹である仮定も連続性の仮定もなしに w に関して凹関数になることに注意する。$\psi(w')$ を

$$\psi(w')\equiv C(w',y)-\langle w',\bar{x}\rangle$$

と定義すると，

$$\psi(w')\leq 0=\psi(w) \qquad \text{for} \quad w'\in\{w' \mid w'_i>0\}$$

が成立する。依って，$\psi(w')$ は w で大域最大解を達成するので, Rockafellar [14], Theorem 23.5 から，

$$0\in\partial^c_w(-\psi)(w)=\partial^c_w(-C)(w,y)+\bar{x}$$

換言すると，

$$\bar{x}\in-\partial^c_w(-C)(w,y)=\partial_w C(w,y),$$

但し，等号は，任意の局所リプシッツ連続な凹関数 φ に対して，Clarke [3] Proposition 2.2.7, 2.3.1 から，

$$\partial^c(-\varphi)(x) = \partial(-\varphi)(x) = -\partial\varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

から従う。 □

Clarke 劣微分 $\partial_w C(w,y)$ は費用関数が微分可能な所では唯一だがカド点では閉区間なので，カド点は Lebesgue 測度の意味で最小解になり易いことに注意しよう。実際，W. Brian Arthur [1] に依る「ロックイン」現象は，収益逓増の費用関数の等量曲線が凹なので，曲線に沿ってカド点が生じることから同様の議論で説明できる。上の結果は要素価格 w の摂動に関する感度分析とみなせることにも注意しよう。しかしながら，一般に $C(\cdot,y)$ が凹ならば $x(w)$ が連続とはならないので，次節で連続性に関して追究する。

次に，利潤最大化モデル (Pmax) に関する結果を示す。

補題 2 *[23]* 利潤最大化モデル (Pmax) に於いて，$\pi(p,w)$ は 1 次同次且つ凸である。□

一般 Hotelling の補題 を確立する。

定理 3.2 利潤最大化モデル (Pmax) に於いて，関数 $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ は上半連続とする。$\bar{x}$, $\bar{y}$ を (Pmax) の内点解, 即ち, $\pi(p,w) = p\bar{y} - \langle w, \bar{x}\rangle = \max\{py - \langle w, x\rangle \mid f(x) \geq y, x \in \mathbb{R}^n_+\}$ とする。その時，π の (p,w) での p, w に関する劣微分が存在して，

$$\begin{aligned} \bar{y} &\in \partial^c_p \pi(p,w) \\ -\bar{x}_j &\in \partial^c_{w_j} \pi(p,w), \quad j = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{5}$$

が成立する。

［証　明］ $\bar{x}, \bar{y}$ を (Pmax) の (p,w) での利潤最大解とする。$\phi(p',w')$ を

$$\phi(p',w') \equiv \pi(p',w') - (p'\bar{y} - \langle w', \bar{x}\rangle)$$

と定義すると $\phi(p,w) = 0$ である。$\pi(p',w')$ の定義から，

$$\phi(p',w') \geq 0 = \phi(p,w)$$

が成立する。よって，

$$0 \in \partial_p^c \phi = \partial_p^c \pi - \bar{y},$$

$$0 \in \partial_{w_j}^c \phi = \partial_{w_j}^c \pi + \bar{x}_j, \quad j = 1, ..., n$$

が Rockafellar [14], Theorem 23.5 と $\pi(p,w)$ の (p,w) に関する凸性から従う。 □

補題 3　凸関数 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の劣微分 $\partial^c\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は各 x に於いて空でないコンパクト凸集合であり，$z = (1-\lambda)x + \lambda y$, $0 < \lambda \leq 1$ に対して

$$\langle \eta, y - x \rangle \geq \langle \xi, y - x \rangle, \quad \forall \xi \in \partial^c\varphi(x),\ \forall \eta \in \partial^c\varphi(z)$$

の意味で，錐単調増加な上半連続の対応 *(correspondence)* である。

［証　明］　φ の凸性より，

$$\varphi(x) - \varphi(z) \geq \langle \eta, x - z \rangle, \quad \forall \eta \in \partial^c\varphi(z)$$

即ち

$$\varphi(z) - \varphi(x) \leq \langle \eta, z - x \rangle = \lambda\langle \eta, y - x \rangle, \quad \forall \eta \in \partial^c\varphi(z)$$

が成立する。一方，

$$\varphi(z) - \varphi(x) \geq \langle \xi, z - x \rangle = \lambda\langle \xi, y - x \rangle, \quad \forall \xi \in \partial^c\varphi(x)$$

だから，

$$\langle \eta, y - x \rangle \geq \langle \xi, y - x \rangle, \quad \forall \xi \in \partial^c\varphi(x),\ \forall \eta \in \partial^c\varphi(z)$$

□

定理 3.3　利潤最大化モデル (Pmax) に於いて，関数 $f: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ は上半連続とする。$\bar{x}, \bar{y}$ を (Pmax) の内点解とする。その時，p が増加すれば生産量 $\bar{y}$ は増加し，w_j が増加すれば要素需要 $\bar{x}_j$ は減少する。

［証　明］　$\pi(p,w)$ は補題 2 から p, w_j に関して $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ の凸関数になることと，定理 3.2, 補題 3 から従う。 □

4 感度分析

費用最小化モデル (Cmin) に対する最適性の条件を考える。

制約想定 (Q1): (Cmin) の解 $\bar{x}$ で,

$$0 \in -r\partial f(\bar{x}) + N(\mathbb{R}^n_+;\bar{x}), \tag{6}$$

但し $N(\mathbb{R}^n_+;\bar{x})$ は $\bar{x}$ での $\mathbb{R}^n_+$ の極錐, を満たす $r \geq 0$ は $r=0$ 以外に存在しない。

制約想定 (Q1) の下で (Cmin) の局所最適解 $\bar{x}$ で次の最適性条件が成立する。

$$0 \in w - r\partial f(\bar{x}) + N(\mathbb{R}^n_+;\bar{x}), \quad f(\bar{x}) = y,\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n_+ \tag{7}$$

生産関数 f が収穫逓減, 特に準凹ならば, 制約想定 $(Q1)$ は簡単になる。その為の準備をする。

関数 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対してレベル集合 S を $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) \geq \phi(x^0)\}$, 距離関数 $d_S(\cdot) : X \to \mathbb{R}$ を

$$d_S(x^0) \equiv \inf\{\| x^0 - c \| \mid c \in S\},$$

閉凸錘 $\mathcal{T}(S;x^0)$ を

$$\mathcal{T}(S;x^0) \equiv \{d \in \mathbb{R}^n \mid d^\circ_S(x^0;d) = 0\},$$

接錘 $T(x^0)$ を

$$T(x^0) \equiv \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \downarrow 0,\ d_k \to d,\ \text{with}\ \ x + t_k d_k \in S, \quad \forall k\},$$

極錘 $N(x^0)$ を

$$N(x^0) \equiv \{\zeta \in \mathbb{R}^n \mid \langle \zeta, d \rangle \leq 0, \quad \forall d \in T_i(x^0)\},$$

で定義する。

補題 1 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., m,$ を局所リプシッツ連続な準凹関数とする。$0 \notin \partial\phi(x_0)$ と仮定する。その時,

$$N(x_0) \subset -\mathbb{R}_+ \partial\phi(x_0). \tag{8}$$

更に, ϕ が正則ならば,

$$N(x_0) = -\mathbb{R}_+ \partial\phi(x_0) \tag{9}$$

が成立する。

［証　明］　$T(x^0)$ の定義と ϕ の局所リプシッツ連続性，S の凸性から，$T(x^0)$ は Hiriart-Urruty [8], Theorem 2 への Remark 2 の様に

$$T(x^0) = \mathcal{T}(S; x^0) = \mathrm{cl}\{\mathbb{R}_+(\mathrm{cl}\ S - x^0)\}. \tag{10}$$

その時，$-\phi$ を [8], Proposition 4 への Remark 1 の g_i とみなせば，

$$N(x^0) \subset -\mathbb{R}_+ \partial\phi(x^0).$$

但し ϕ の局所リプシッツ連続性から，$\partial\phi(x^0)$ は非空，が成立する。

逆に，ϕ が正則ならば，Clarke [3], Theorem 2 から $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (-\phi)(x) \leq (-\phi)(x^0)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x^0) \leq \phi(x)\}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\{d \in \mathbb{R}^n \mid (-\phi)^\circ(x^0; d) \leq 0\} &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \phi^\circ(x^0; d) \leq 0\} \\
&= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \max_{\xi \in \partial\phi(x^0)} \langle \xi,\ -d \rangle \leq 0\} \\
&= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \max_{\xi \in \partial\phi(x^0)} \langle -\xi,\ d \rangle \leq 0\} \\
&= T_S(x^0) = T(x^0).
\end{aligned}$$

その時，

$$\langle -\xi,\ d \rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in \partial\phi(x^0), \quad \forall d \in T(x^0)$$

が成立するので

$$-\mathbb{R}_+ \partial\phi(x^0) \subset N(x^0)$$

となる。よって，ϕ が正則ならば

$$N(x^0) = -\mathbb{R}_+ \partial\phi(x^0).$$

が成立する。 □

補題 2　(Cmin) で $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ は局所リプシッツ連続な準凹関数と仮定する。$f(x') > y$ かつ $f(\bar{x}) = y$ *for* $\exists x', \bar{x} \geq 0$ と仮定する。

$$0 \notin \partial f(\bar{x}) \tag{11}$$

が成立するならば，$f(x)$ は *Hiriart-Urruty [7]* の制約想定*:*

$$\exists d \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n_+; \bar{x}), \quad (-f)^\circ(\bar{x}; d) < 0$$

を満たす。

[証　明]　接錘 $T(\bar{x})$ は $\bar{x}$ で閉凸錘であり，f が局所リプシッツ連続な準凹関数で $0 \notin \partial f(\bar{x})$ ならば，

$$N(\bar{x}) \subset -\mathbb{R}_+ \partial f(\bar{x}), \tag{12}$$

但し，$N(\bar{x}) = \{\zeta \mid \langle \zeta, d \rangle \leq 0, \forall d \in T(\bar{x})\}$ が 補題 1 から従う。

ここで，$(0 \neq)\ x' - \bar{x} \in \mathrm{int}\ T(\bar{x})$ を取ると，

$$\begin{aligned} f^{\circ}(\bar{x}; x' - \bar{x}) &= \max\{\langle \xi, x' - \bar{x} \rangle \mid \xi \in \partial f(\bar{x})\} \\ &\geq \langle \xi, x' - \bar{x} \rangle, \quad x' - \bar{x} \in \mathrm{int}\ T(\bar{x}). \end{aligned}$$

及び (12) から $0 \neq \exists \xi^0 \in -\partial f(\bar{x}) \cap -N(\bar{x})$ に対して $\langle \xi^0, x' - \bar{x} \rangle > 0$ だから，

$$\langle \xi, x' - \bar{x} \rangle > 0$$

なので，

$$f^{\circ}(\bar{x}; x' - \bar{x}) > 0$$

を得る。実際，上と同様に $\langle \xi, x' - \bar{x} \rangle < 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned} f^{\circ}(\bar{x}; \bar{x} - x') &= \max\{\langle \xi, \bar{x} - x' \rangle \mid \xi \in \partial f(\bar{x})\} \leq \max\{\langle -\xi, x' - \bar{x} \rangle \mid \xi \in \partial f(\bar{x})\} \\ &< 0. \end{aligned}$$

よって，Clarke [3], Proposition 2.1.1(c) から

$$(-f)^{\circ}(\bar{x}; x' - \bar{x}) = f^{\circ}(\bar{x}; \bar{x} - x') < 0$$

が成立するので，Hiriart-Urruty の制約想定を満たす。 □

準凹より少し狭い関数のクラスを定義する。

定義　関数 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq 0, \xi \in \partial f(x_0), \forall x,\ x_0 \in \mathbb{R}^n_+ \Rightarrow f(x) \leq f(x^0)$$

ならば，**擬凹 (pseudoconcave)** という。

生産関数 f が収穫逓減，特に準凹の時の最適性の条件を述べる。

定理 4.1　費用最小化問題 (Cmin) に於いて，生産関数 $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続と仮定する。次の条件の 1 つが成立すると仮定する:

1. f が準凹，かつ $0 \notin \partial f(\bar{x})$,

2. f が擬凹，かつ ある $x' \in \mathbb{R}^n_+$ に対して $f(x') > y$.

その時，$\bar{x}$ が大域最適解であることと *(7)* が $\bar{x}$ で成立することは同値である。

[証 明]　f が準凹か擬凹ならば，$U(f,y)$ は凸集合になり (Cmin) は凸計画問題になるので，$\bar{x}$ は大域最小解である。

f が 2 を満たすならば，$0 \in \partial f(\bar{x})$ の時には, $\langle 0, x' - \bar{x}\rangle \leq 0$ ならば $f(x') \leq f(\bar{x})$ となる。$f(x') > f(\bar{x})$ なので矛盾。よって $0 \notin \partial f(\bar{x})$ となり 1 を満たす。

補題 2 から $0 \notin \partial f(\bar{x})$ ならば，Hiriart-Urruty 制約想定が成立するので,

$$\begin{aligned}\langle -r\partial f(\bar{x}) + z, d\rangle &= \langle r\partial(-f)(\bar{x}) + z, d\rangle \\ &\leq r(-f)^\circ(\bar{x}; d) + \langle z, d\rangle \leq 0,\end{aligned}$$

for $r \geq 0$, $\forall z \in N(\mathbb{R}^n_+; \bar{x})$, $\exists d \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n_+; \bar{x})$, 但し等号は $r = 0 \in \mathbb{R}^n_+$ のみ, となるので制約想定 (Q1) が成立する。

(Cmin) は凸計画問題であり，制約想定 (Q1) が成立するので，(7) は $\bar{x}$ が大域最小解になる必要十分条件になる。 □

費用最小化モデルに於いて，費用関数 C が凹ならば生産関数 f が局所リプシッツ連続とは限らない。更に，条件付き要素需要関数 $x(w)$ は目的関数 $C(w, \bar{y})$ が連続でさえ，不連続になり得る。$x(w)$ が w に関して不連続に大きく変化するならば，$x(w)$ は他企業に関連した入力ともみなれるので全体経済に悪影響を及ぼす。

$x(w)$ が安定になる条件を考えよう。生産関数 f が線形でさえ，$x(w)$ が安定とは限らないことは注意すべきである。関数 f が滑らかな時，こんな好ましくない現象を避ける為には，f の曲率が 0 でないことが十分である。

先に進む前に,

$$C(w, y) = \min_x \{\langle w, x\rangle \mid f(x) \geq y, x \in \mathbb{R}^n_+\},$$

$$Y = [0, y]$$

と

$$f^C(x) = \max\{\eta \in Y \mid C(w, y) \leq \langle w, x\rangle, \quad \text{for every } w \in \mathbb{R}^n_{++}\}.$$

で定義される費用最小化問題を考えよう。

定義　関数 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $f = f^C$ その時に限り無矛盾（*consistent*）という。

定理 4.2　関数 f を上半連続且つ非増加と仮定する。関数 f が準凹ならばその時に限り f は無矛盾である。

[証　明]　十分性：　Avriel, Diewert, Schaible, Zang [2], Theorem 4.5 から従う。
必要性：　無矛盾性は，$U(f,y)$ の閉性と $U(f,y)$ の境界の任意の点で費用関数に対応する接線の存在を保証する過程の下で凸性と等しい。その時，結果は Mangasarian [10], Theorem 9.1.3 から従う。 □

我々は関数 f が上半連続ならば $C(w,\cdot)$ は不連続になり得るので，f のより制限的なクラス——局所リプシッツ連続関数のクラス——を考える。

仮定 L　生産関数 $f:\ \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ は局所リプシッツ連続，且つ，非減少である。

定義　生産関数 $f:\ \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ は，$\exists\alpha > 0$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\} + (1-\lambda)\lambda\alpha \parallel x_2 - x_1 \parallel^2 \tag{13}$$

$\forall x_1, x_2$ s.t. $\pm(x_2 - x_1) \notin \mathbb{R}^n_{++}$, $\forall\lambda \in [0,1]$.

が成立するならば，$x \in \mathbb{R}^n_+$ で**強準凹 (strongly quasiconcave)** であるという。

定義　関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は有限で，

$$M(v) = \mathrm{argmax}_{|x-\bar{x}|\leq\delta}\{f(\bar{x}) - f(x) - \langle v, \bar{x} - x\rangle\}$$

が単一解で $M(0) = \bar{x}$ $(v = 0)$ の周りでリプシッツ連続であるならば，$\bar{x} = 0$ を **tilt-stable 局所最大解** という。

補題 3　関数 f を C^2 級，$\nabla f(\bar{x}) = 0$ と仮定する。
$\bar{x} = 0$ が *tilt-stable* 局所最大解 であることと $\nabla^2 f(\bar{x})$ が負定値であることは同値である。
□

［証　明］　Poliquin and Rockafellar [12], Proposition 1.2 から従う。 □

我々は $x(w)$ の連続性を保証する次の定理を確立する。

定理 4.3　費用最小化モデル (Cmin) に於いて，生産関数 $f:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ を局所リプシッツ連続且つ無矛盾と仮定する。$\bar{x}_1 = x(w_1)$, $\bar{x}_2 = x(w_2)$ を (Cmin) の $U(f,y)$ 上での内点解とする。f が $\mathbb{R}^n_+$ 上で強準凹ならば，条件付き要素需要関数 $x(w_1)$ は局所リプシッツ関数である，即ち，任意の $\forall y < y_0$, $y_0 = \sup f(x)$ に対して，$\exists M_y > 0$ が存在して，$\bar{x} \in U(f,y)$, $g \in \partial f(\bar{x})$ ならば $\| g \| \leq M_y$, 且つ $\delta w = w_2 - w_1$, $w_1 \neq 0$ に対して，

$$\| \delta x \| \leq \frac{M_y \| \delta w \|}{\alpha \| w_1 + \delta w \|} \to 0, \quad \| \delta w \| \to 0 \tag{14}$$

が成立する。

更に，f が C^2 級　で $x(w)$ がカド点でないならば，その逆も成立する。

［証　明］　前半を示す。$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \delta x$, $w_2 = w_1 + \delta w$ とする。その時，Vial [24], Corollary 1 と同様に単位内方向法線を $p_1 = w_1/\| w_1 \|$, $p_2 = w_2/\| w_2 \|$, と選ぶことにより，

$$\begin{aligned}
\| \delta x \| = \| \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \| &\leq \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \| p_2 - p_1 \| \\
&= \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \left\| \frac{w_2}{\| w_2 \|} - \frac{w_1}{\| w_1 \|} \right\| \\
&= \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \left\| \frac{\| w_1 \| (w_1 + \delta w) - \| w_1 + \delta w \| w_1}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \right\| \\
&= \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \frac{\| \, \| w_1 \| \delta w - (\| w_1 + \delta w \| - \| w_1 \|) w_1 \|}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \\
&\leq \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \frac{\| w_1 \| \| \delta w \| + \| (\| w_1 + \delta w \| - \| w_1 \|) w_1 \|}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \\
&\quad \text{(Schwartz's inequality)} \\
&\leq \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \frac{\| w_1 \| \| \delta w \| + (\| w_1 \| + \| \delta w \| - \| w_1 \|) \| w_1 \|}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \\
&\quad \text{(Minkowski's inequality)} \\
&= \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \frac{2 \| w_1 \| \| \delta w \|}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|}
\end{aligned}$$

$$= \frac{M_y}{\alpha} \cdot \frac{\| \delta w \|}{\| w_1 + \delta w \|} \to 0, \quad \| \delta w \| \to 0.$$

後半は補題3を使う。実際，$f(x)$, $x(w)$ の局所リプシッツ性から，$\bar{x}$ は $f(x)$ の $U(f, y)$ での tilt-stable 局所最大解となるので，$f(\bar{x}_1 + v) = f(\bar{x}_1) + \langle \nabla f(\bar{x}_1), v \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\bar{x}_1) v, v \rangle + o(v^2)$ だから $\nabla^2 f(\bar{x}_1)$ は $\langle \nabla^2 f(\bar{x}_1) v, v \rangle < 0$ for $v \in \mathbb{R}^n$, $\pm v \notin \mathbb{R}^n_{++}$ s.t. $\langle \nabla f(\bar{x}_1), v \rangle = 0$, $\| v \| = 1$ となる意味で負定値になる。よって任意の $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ に対して，$\langle \nabla f(x) v, v \rangle$ は x, v に関して連続，$\bar{x}_2 \approx \bar{x}_1$，$v' \approx v$ であるから，$\langle \nabla f(x') v', v' \rangle < 0$, $v' = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 / \| \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \|$, $x' = (1 - \lambda)\bar{x}_1 + \lambda \bar{x}_2$, $\lambda \in [0, 1]$, となり，(13) を満たす $\alpha > 0$ が存在する。 □

次に，生産量 y の摂動に関する感度分析を考える。

費用最小化問題 (Cmin) に於いて，摂動問題 (Cmin(q)) を次の様に定義する：

$$\begin{array}{llll} (\text{Cmin}(q)) & \mathcal{C}(q) = & \text{minimize} & \langle w, x \rangle \\ & & \text{subject to} & f(x) \geq y + q, \\ & & & x \in \mathbb{R}^n_+. \end{array}$$

仮定 C　$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続とする。$\mathcal{C}(0)$ は有限であり，コンパクト集合 $\Omega \in \mathbb{R}^n_+$ と $\epsilon_0 > 0$ が存在して，(Cmin(q)) が Ω 内に解を持ち，$\mathcal{C}(q) < \mathcal{C}(0) + \epsilon_0, \forall |q| < \epsilon_0$ を満たす.

仮定 C は次の定理の条件で保証される。

定理 4.4　(Cmin(q)) において，生産関数 $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ は局所リプシッツ連続と仮定する。十分小さい $|q|$ に対して (Cmin(q)) に解があると仮定する。その時，仮定 C は成立する。

[証　明]　$\bar{x}$ を (Cmin) の解, $\bar{x}_q$ を (Cmin(q)) の解とする。
その時 f の局所リプシッツ連続から，
for $\forall |q|$, $\exists x_q$, $\exists \delta > 0$ s.t. $f(x_q) = y + q$, $\| \bar{x} - x_q \| < \delta$.

一方，目的関数の局所リプシッツ連続性から，
for $\forall\varepsilon > 0$, $|\langle w, \bar{x}_q\rangle - \langle w, \bar{x}'\rangle| < \varepsilon$, $\exists\bar{x}'$, $\exists\delta' > 0$ s.t. $f(\bar{x}') = y$, $\| \bar{x}_q - \bar{x}' \| < \delta'$.

許容性から $\langle w, \bar{x}\rangle \leq \langle w, \bar{x}'\rangle$, $\langle w, \bar{x}_q\rangle \leq \langle w, x_q\rangle$ が，Schwarz の不等式から，$|\langle w, \bar{x}\rangle - \langle w, x_q\rangle| \leq \| w \| \| \bar{x} - x_q \| < \| w \| \delta$, $|\langle w, \bar{x}_q\rangle - \langle w, \bar{x}'\rangle| \leq \| w \| \| \bar{x}_q - \bar{x}' \| < \| w \| \delta'$ が成立する。

6通りのケースがある:
1. $\langle w, \bar{x}\rangle \leq \langle w, \bar{x}'\rangle \leq \langle w, \bar{x}_q\rangle \leq \langle w, x_q\rangle$; 2. $\langle w, \bar{x}\rangle \leq \langle w, \bar{x}_q\rangle \leq \langle w, \bar{x}'\rangle \leq \langle w, x_q\rangle$;
3. $\langle w, \bar{x}\rangle \leq \langle w, \bar{x}_q\rangle \leq \langle w, x_q\rangle \leq \langle w, \bar{x}'\rangle$; 4. $\langle w, \bar{x}_q\rangle \leq \langle w, \bar{x}\rangle \leq \langle w, \bar{x}'\rangle \leq \langle w, x_q\rangle$;
5. $\langle w, \bar{x}_q\rangle \leq \langle w, \bar{x}\rangle \leq \langle w, x_q\rangle \leq \langle w, \bar{x}'\rangle$; 6. $\langle w, \bar{x}_q\rangle \leq \langle w, x_q\rangle \leq \langle w, \bar{x}\rangle \leq \langle w, \bar{x}'\rangle$.
しかしながら，どのケースでも，

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}(0) - \mathcal{C}(q)| &= |\langle w, \bar{x}\rangle - \langle w, \bar{x}_q\rangle| \\
&\leq \max\{|\langle w, x_q\rangle - \langle w, \bar{x}\rangle|, |\langle w, \bar{x}_q\rangle - \langle w, \bar{x}'\rangle|\} \\
&< \max\{\| w \| \delta, \| w \| \delta'\}.
\end{aligned}$$

即ち，仮定 C が成立する。 □

Σ を Ω 内の (Cmin) の解集合とし，$M(\Sigma) = \cup_{\bar{x}\in\Sigma} M(\bar{x})$ 但し $M(\bar{x})$ を $\bar{x}$ に対応するラグランジュ乗数とする。

(Cmin) に対する y の摂動を考える。

定理 4.5 費用最小化モデルに於いて生産関数 $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ を局所リプシッツ連続と仮定する。制約想定 (Q1) の下で (Cmin) の最適解の解集合 Σ が単一解 $\bar{x}$ であり，(Cmin(q)) が小さい $\forall|q|$ に対して解を持つならば，$\bar{x}$ で *(7)* が成立し，

$$\begin{aligned}
\partial_y C(w, y) &= \partial\mathcal{C}(0) \\
&= \mathrm{cl\,co}\ M(\bar{x}) \qquad (15) \\
&= \{r \mid w \in r\partial f(\bar{x}) - N(\mathbb{R}^n_+; \bar{x});\quad f(\bar{x}) = y,\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n_+\}.
\end{aligned}$$

を満たす。

［証　明］　制約想定 (Q1) の下で，異常乗数集合 $M^0_k(\bar{x}) = \{0\}$ (Clark [3], Section 6.3)。仮定から (Cmin) は $\bar{x}$ で calm になるので (7) が成立する。Clarke の劣勾配 $\partial_y C(w, y)$ は

定理 4.3, Proposition 6.4.5, Corollary 1 of Theorem 6.5.2 から従う。 □

(Cmin) で生産関数 f の準凹性は必ずしも最適解の安定性を保証しない。

例 1 (Cmin): 線形計画問題の場合

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \langle w, x \rangle \\ \text{subject to} \quad & \langle a, x \rangle \geq y, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

但し $\langle a, x \rangle$, $a \in \mathbb{R}^n_{++}$ は線形生産関数

最適解は簡単な計算で,

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \frac{w_k}{a_k} = \min_i \frac{w_i}{a_i}, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

と求まる。その時, $\partial_y C(w, y) = w_k / a_k$ $(= {}^t c_B B^{-1}$; 慣習的には被約費用 (*reduced cost*)) は生産物の単位当り増加に対して費用が $\partial_y C(w, y)$ 掛かるので生産物の潜在価格 (*shadow price*) という。この場合, 目的関数の変化は $O(\delta C) = O(\delta y)$, しかしながら, 生産関数は強準凹でなく線形（微分可能且つ凹だが）なので入力の変化は $O(\delta x) > O(\delta w)$ となる。

利潤最大化モデル (Pmax) を考える。

制約想定 (Q2): (Pmax) の解 $(\bar{x}, \bar{y})$ で,

$$0 \in -r\partial f(\bar{x}) + N(\mathbb{R}^n_+; \bar{x}), \quad 0 \in r + N(\mathbb{R}_+; \bar{y}) \tag{16}$$

を満たす $r \geq 0$ は $r = 0$ 以外に存在しない。

制約想定 (Q2) の下で (Pmax) の局所最適解 $(\bar{x}, \bar{y})$ で次の最適性条件が成立する。

$$\begin{aligned} 0 &\in w - r\partial f(\bar{x}) + N(\mathbb{R}^n_+; \bar{x}), \\ 0 &\in -p + r + N(\mathbb{R}_+; \bar{y}), \\ & f(\bar{x}) = \bar{y}, \ \bar{x} \in \mathbb{R}^n_+, \ \bar{y} \geq 0. \end{aligned} \tag{17}$$

5 結 論

我々は上半連続関数の枠組みの下での生産理論で 一般 Shephard の補題と 一般 Hotelling の補題 を提案した。

我々はまた，局所リプシッツ連続関数の枠組の下で費用最小化モデルに関する感度分析の結果を提案した。w の変化に対する x の変化は不安定であり，問題の強準凹性の仮定がなければ大きく変化しうる。目的関数値の変化はラグランジュ乗数で表されるが，生産物の潜在価格とみなすことができる。強準凹生産関数は費用最小化モデルに関して最適解の連続性，可解性，安定性を保証する重要なクラスの関数である。

利潤最大化モデルに関しては，(p, w) の変化に対する (x, y) の変化を安定にする為には生産関数の強準凹性だけでは駄目で強凹性の概念が必要と思われる。利潤最大化モデルに関する安定性の条件は将来の課題としたい。

参考文献

[1] W. Brian Arthur, "Increasing returns and the new world of business," *Harvard Business Rev.*, July-August 1996, 100–109.

[2] M. Avriel, W.E. Diewert, S. Schaible, and I. Zang, *Generalized Concavity*, Plenum Press, New York, 1988.

[3] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.

[4] C.W. Cobb and P.H. Douglas, "A theory of production," *Amer. Econ. Rev.*, **18** (1928), 139–165.

[5] W.E. Diewert, "Duality approaches to microeconomic theory," in: *Handbook of Mathematical Economics, vol. II*, (K.J. Arrow and M.D. Intriligator eds.), North-Holland, 1982.

[6] J. Hicks, *Value and Capital*, Claredon Press, England, 1946.

[7] J.B. Hiriart-Urruty, "On optimality conditions in nondifferentiable programming," *Math. Program.*, **14** (1978), 73–86.

[8] ____, "Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces," *Math. Oper. Res.*, **4** (1979), 79–97.

[9] H. Hotelling, "Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply function," *J. Pol. Econ.*, **40** (1932), 577–616.

[10] O.L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[11] H. Minkowski, "Theorie der konvexen körper in besondere begründing ihrs oberflächenbegriffs," in: *Gesammelte Abhandlungen II*, (B.G. Teubner ed.), Leipzig, Germany, 1911.

[12] R.A. Poliquin and R.T. Rockafellar, "Tilt stability of a local minimum", *SIAM J. Optim.*, **8** (1998), 287–299.

[13] J.K.-H. Quah, "The comparative statics of constrained problems", *Econometrica* **75** (2007), 401–431.

[14] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[15] R.T. Rockafellar and R.J-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998.

[16] P.A. Samuelson, "Prices of factors and goods in general equilibrium," *Rev. Econ. Study*, **21** (1953—1954), 1–20.

[17] _____, *Foundations of Economic Analysis, 2nd ed.*, Harvard University Press, Cambridge, 1983.

[18] R.W. Shephard, *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[19] _____, *The Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[20] N. Sun and Z. Yang, "Equilibra and indivisibilities: gross substitutes and complements," *Econometrica*, **74** (2006), 1385–1402.

[21] T. Suzuki, "Nonconvex production economics," *J. Econ. Theory*, **66** (1995), 158–177.

[22] Y. Tanaka, "Note on generalized convex functions," *J. Optim. Theory Appl.*, **66** (1990), 345–349.

[23] Hal R. Varian, *Microeconomic Analysis — 3rd Edition*, Norton, New York, 1992.

[24] J.-P. Vial, "Strong convexity of sets and functions", *J. Math. Econ.*, **9** (1982), 187–205.